第 56 卷 第 6 期 2007 年 6 月
1000-3290/2007/56(06)/3306-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 56, No. 6, June, 2007
c 2007 Chin. Phys. Soc.

声子气的状态方程和声子气运动的守恒方程

过增元[†] 曹炳阳 朱宏晔 张清光

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

(2006 年 8 月 1 日收到; 2006 年 11 月 2 日收到修改稿)

根据爱因斯坦的狭义相对论中质能的等效关系, 把固体(本文指非导体)晶格(原子)的质量分为晶格(原子)的静质量和晶格热振动能量的等效质量两个部分, 后者就是固体中声子气的等效质量. 晶格(原子)热振动的能量则分为晶格(原子)静质量具有的热能以及声子气质量具有的热能. 基于固体的状态方程, 导得了晶格静质量热振动的状态方程和声子气的状态方程. 声子气在固体介质中的宏观运动就是热量在固体中的传递过程. 建立了声子气运动的守恒方程组, 分析表明, 忽略惯性力时声子气的动量守恒方程就退化为傅里叶导热定律, 阐明了傅里叶导热定律的物理本质是声子气驱动力与阻力的平衡方程. 当热流密度很大惯性力不能忽略时, 傅里叶导热定律不再适用.

关键词: 非傅里叶导热, 声子气, 声子气质量, 状态方程, 守恒方程
PACC: 4410, 6370, 0340G

1. 引 言

物体中热量(热能)的转移过程称热传导或导热过程, 热传导过程的基本定律是傅里叶导热定律, 它指出单位时间、单位面积通过的热流通量与温度梯度成正比, 比例系数称物体的导热系数. 傅里叶导热定律是实验定律, 为大量的实验和工程实践所证实, 并获得了广泛的应用. 然而, 用傅里叶导热定律描述瞬态导热过程时, 由于所得到的热传导方程是抛物型的, 因此出现了热扰动传播速度无穷大的现象. 这种物理上的缺陷在历史上吸引了大量学者进行研究, 以改善傅里叶导热模型. 最早是 Cattaneo[1], 随后 Vernotte[2] 以及 Morse 等[3] 提出了新的热流定律来代替傅里叶导热定律, 称之为 CV 方程, 其中多了一个热流对时间的导数项, 方程则变为双曲型, 从而使热扰动传播速度成为有限值. 而后 Gurtin 等[4] 和 Coleman 等[5] 则给出了类似于 CV 方程的更为一般化的导热本构方程.

实际上对于绝大多数的热传导问题, 热扰动速度为有限值的影响都是可以忽略不计的, 只有在超快速加热或极低温条件下, 才需要考虑热扰动传播是有限值的这种非傅里叶导热现象. 例如, Tzou[6,7] 推导了非傅里叶导热方程的不同表达式, Xu 等[8] 研究了电子芯片中的热波现象, 而 Brorson 等[9] 测量了热脉冲穿过金属膜所需要的时间, 所求得的热扰动传播速度约在 10^6 m/s 左右, 虽然很大但决非无穷大.

以上都是讨论在快速瞬态导热情况的非傅里叶导热现象, 近年来则出现在稳态导热情况下傅里叶导热定律的适用性问题的讨论. Lepri 等[10] 用数值方法研究了在一非线性一维谐振子链中的热传导问题, 所得到的导热系数与粒子数(长度)的平方根近似成正比, 即傅里叶导热定律不再适用. Narayan 等[11] 基于动量守恒分析计算了一维流体的导热系数与系统尺度的立方根成正比. Maruyama[12] 用分子动力学模拟的方法计算了长度为 6—404 nm 的单壁碳纳米管的导热系数, 并发现了导热系数随碳纳米管长度的增加而增加. Livi 等[13] 总结了上述的奇异导热现象, 并把它们归结为空间维数的影响. 本文则从热能在物体中运动(传递)的基本规律出发研究傅里叶导热定律的物理本质及其适用性的问题.

固体(本文指非导体)中晶格热振动的能量称固体的热能, 能量量子化的格波称之为声子, 声子气的能量就代表了固体的热能. 晶格的导热理论是把热传导过程看作为声子沿一定浓度梯度扩散到样品的另一端, 其间受到频繁的碰撞. 固体的导热系数(热导率)通常是根据傅里叶导热定律来确定的, 即热流

† E-mail: demgzy@tsinghua.edu.cn

密度与温度梯度之比值定义为导热系数. 把经典气体分子运动论关于热导率的理论移植到声子扩散(热传导),从而求得了导热系数与声子的速度和声子平均自由程的关系[14—16].

与以傅里叶导热定律描述的扩散型导热理论不同,本文认为固体介质中的热量传递实际上是声子气在固体介质中的宏观运动(传递),因此研究声子气在固体介质中的宏观运动规律才能更好地反映热量传递过程. 由于声子气的压力梯度是声子气运动的驱动力,因此需建立反映压力与温度关系的声子气的状态方程. 由于声子的散射和介质的缺陷等因素都将阻碍声子气的运动,因此需要建立阻力与声子气运动速度的关系. 这样就可以建立声子气运动的守恒方程,阐明傅里叶导热定律的物理本质和适用范围,以及揭示极端条件下非傅里叶导热现象的根源,从而能够更全面地描述热量传递的现象.

2. 声子气的状态方程

2.1. 晶格热振动的状态方程

由热力学可导得固体的赫姆霍兹函数[17]

$$F = E_0(V, N) + F_D(T, V, N), \tag{1}$$

其中,E_0 是 0 K 时的自由焓,它等于晶格上所有原子处于其平衡位置时的总势能,F_D 是基于德拜理论的晶格热振动的贡献. 由(1)式并可导得固体的德拜状态方程

$$p = -\frac{\partial E_0}{\partial V} + \frac{\gamma E_{D0}}{V}, \tag{2}$$

其中,p 和 V 分别是固体的压力和体积,E_{D0} 是晶格热振动的能量,即固体的热能,γ 是格留乃森常数. 从(2)式中可以看到,固体的压力由两部分组成. 等式右边的第 1 项是原子间作用力的贡献,称静压力,第 2 项则是晶格热振动的贡献,称热压力[18]. 在此基础上可求得固体的线膨胀系数

$$\beta_v = -\frac{k\gamma c_v}{3V}, \tag{3}$$

其中,β_v 是线膨胀系数,k 是体积压缩系数,c_v 是固体的比热容.

现有文献中固体的状态方程主要用于研究热膨胀现象和求得膨胀系数与其他系数的关系式. 而我们则把它用于获得晶格热振动和声子气的状态方程.

现在我们把固体状态方程(2)中由于热振动引起的压力分离出来,

$$p_0 = \frac{\gamma E_{D0}}{V}, \tag{4}$$

固体中的热能(热容量)早期是用经典的能量均分原理来计算的,求得固体的比热容为

$$c_v = 3R_{mol}, \tag{5}$$

称之为 Dulong-Petit 定律,其中 R_{mol} 是普适气体常数. 以后爱因斯坦和德拜用量子理论研究固体的比热,结果表明,当固体温度比德拜温度高很多时[17],比热容就满足 Dulong-Petit 定律. 这样固体的热能就可以表示为

$$E_{D0} = 3R_{mol}T = 3M_0RT, \tag{6}$$

其中 M_0 是物体的静止质量,R 是气体常数. 代入(4)式就可得到高温条件下晶格热振动的状态方程

$$p_0V = 3\gamma M_0RT, \tag{7a}$$

或

$$p_0 = 3\gamma\rho_0RT, \tag{7b}$$

其中 ρ_0 是固体的密度,γ 为格留乃斯常数,对于不同物体,它的数值大多在范围 0.8—2.0 范围之内. 从(7)式可以看到晶格热振动的状态方程,与理想气体的状态方程很类似.

2.2. 声子气的质量

声子是能量子,由大量声子组成的声子气具有的能量概念是大家熟悉的,现在我们引入声子气能量的等效质量的概念. 根据爱因斯坦的狭义相对论[19],物体的质量将随其运动速度而增加,物体的质量和能量是统一和等效的,运动物体的质能关系为

$$E = Mc^2 = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{8a}$$

其中 M 为运动物体的质量,称动质量或相对性质量,M_0 是物体的静止质量,u 是物体运动速度,c 是真空中的光速,E 则是运动物体的能量或相对性能量,M_0c^2 是静止物体的能量. 从(8a)式可导出物体动质量与静质量的关系

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{9a}$$

当 $u \ll c$ 时,(8a)和(9a)式可以近似地简化为

$$E = M_0c^2 + \frac{1}{2}M_0u^2, \tag{8b}$$

$$M = M_0 + \frac{\frac{1}{2}M_0u^2}{c^2}, \tag{9b}$$

其中 $M_0 u^2/2$ 是牛顿力学中的物体动能表达式. 这表明相对性能量是静质量的能量与动能之代数和,相对性质量是静质量与动能的等效质量之代数和. 对于如图 1 所示的质量为 M_0 的宏观上静止的物体,当其温度为 T 时,该物体具有如(6)式所示的热能,它是指固体静质量的热振动能量,所以质量用 M_0 表示之. 由于声子速度远小于光速,固体因热振动而增加的质量部分可直接写为

$$M_h = \frac{E_{D0}}{c^2}, \qquad (10)$$

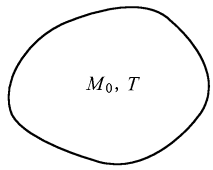

图 1 质量为 M_0,温度为 T,宏观上静止的固体

我们把 M_h 称为热振动质量,简称热质量,它也就是声子气能量的等效质量,简称声子气的质量,所以固体的总质量为静质量与声子气质量(热质量)之和

$$M = M_0 + M_h. \qquad (11)$$

2.3. 声子气的状态方程

高温条件下晶格热振动能量通常是指晶格原子静质量热振动的能量,现在我们考虑晶格原子的相对性质量热振动的能量,或称晶格热振动的总能量

$$E_D = E_{D0} + E_h = 3(M_0 + M_h)RT, \qquad (12)$$

其中 E_{D0} 是牛顿力学框架中物体具有的热能,即固体原子静质量所具有的热能,而 E_h 则代表声子气等效质量的热能,即声子气质量也具有热能

$$E_h = \frac{E_{D0}}{c^2}(3RT) = \frac{M_0}{c^2}(3RT)^2, \qquad (13)$$

这是一个新的物理量,它的物理意义是:声子气的等效质量具有的热势能.

与晶格静质量热振动的状态方程(7)类似,我们可以得到声子气无规运动引起的压力与能量的关系式

$$p_h V = 3\gamma M_h RT, \qquad (14a)$$

或

$$p_h = 3\gamma\rho_h RT = \frac{\gamma\rho}{c^2}(3RT)^2, \qquad (14b)$$

其中 $\rho_h = 3\rho RT/c^2$ 是声子气的质量密度. 因此,(14)式就是声子气的状态方程,它反映了声子气的质量密度、温度和压力之间的关系,值得注意的是,由于声子气的质量密度与温度成正比,所以声子气的压力(热振动能量等效质量无规运动导致的压力,也可以简称热质压力)是与其温度的平方成正比的. 因此考虑原子运动的等效质量后,晶格热振动导致的总热压力 p 由两部分组成

$$p = p_0 + p_h, \qquad (15)$$

p_0 是晶格原子静质量热振动引起的热压力,而 p_h 是因原子运动能量等效质量热振动引起的热压力,即声子气质量引起的压力,也可称为热质压力.

3. 声子气运动的守恒方程

3.1. 声子气的运动速度

在温度均匀的固体中声子只有无规运动速度,而无漂移速度,所以声子气是静止的,即声子气的宏观运动速度为零. 当固体介质中存在温度梯度时,声子就具有漂移速度,即声子气具有宏观运动,后者就是固体介质中热量(热能)的宏观运动. 我们可以从传热学中常用的热流量(或热流密度)导出热量运动速度,即声子气运动速度这个物理量

$$q = \rho c_v T u_h, \qquad (16)$$

其中,热流密度 q 是单位时间通过单位面积的热量,$\rho c_v T$ 是单位体积中的热能,即单位体积中声子气的热能. 把等式两边都除以光速的平方则

$$q_h = \frac{q}{c^2} = \frac{\rho c_v T}{c^2} u_h = \rho_h u_h, \qquad (17)$$

其中 q_h 是单位时间内通过单位面积的声子气的质量,它等于声子气的质密度与流速的乘积,可称其为声子气的质量流速,它类似于流体力学中的质量流速.

3.2. 质量守恒方程(连续性方程)

声子气在运动过程中其等效质量的守恒方程(连续性方程)为

$$\frac{\partial\rho_h}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_h \mathrm{U}_h) = 0, \qquad (18)$$

方程左边第 2 项是源项,当固体介质中有热源和热汇时,相当于声子气中有等效质量的源或汇. 对于如图 2 所示的平板,在一维、稳态的条件下,上式可简化为

$$\rho_h u_h = q_h = \text{const}, \qquad (19)$$

上式表明,进入和流出平板的声子气的质量总是相等的. 但是由于固体中的声子气密度是随温度变化的,所以进入和流出平板声子气的运动速度是不同的,它们的比值为

$$\frac{u_{h2}}{u_{h1}} = \frac{\rho_{h1}}{\rho_{h2}} = \frac{T_1}{T_2}, \tag{20}$$

这表明,尽管声子气的质量流量相同,但从高温向低温流动的声子气却是加速的.

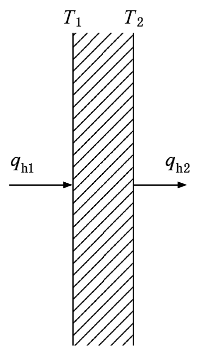

图 2　平板一维稳态导热示意图

3.3. 动量守恒方程(力平衡方程)

晶格原子静质量热振动形成的热压力梯度导致固体介质中的热应力,而声子气的压力梯度,即热质压力梯度能推动声子气的运动. 所以声子气的压力梯度就是声子在介质中运动的驱动力. 声子气的质量与速度的乘积就是声子气宏观运动的动量(注:它与现有文献中定义的声子准动量是不同的,后者是声子的能量除以声速定义为声子的准动量). 由于晶格振动的非简谐性和固体介质中的缺陷,将形成声子气运动的阻力,这样,通过元体的声子气的动量守恒方程为

$$\rho_h\left(\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} + \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{U}_h\right) + \nabla p_h + f_h = 0, \tag{21}$$

在一维稳态条件下可简化为

$$\rho_h u_h \frac{\mathrm{d} u_h}{\mathrm{d} x} + \frac{\mathrm{d} p_h}{\mathrm{d} x} + f_h = 0, \tag{22}$$

其中第 1 项是声子气运动的惯性力,第 2 项是声子气的压力梯度,是驱动力,第 3 项则是声子气运动的阻力,因此(22)式就是作用在元体上的力平衡方程. 对于一维可压缩"绝热"(这里指没有声子气的源或汇)过程,声子气压力与温度的关系式为

$$\mathrm{d} p_h = \rho_h c_p \mathrm{d} T. \tag{23}$$

所以动量守恒方程可表示为

$$\rho_h c_p \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} x} + \rho_h u_h \frac{\mathrm{d} u_h}{\mathrm{d} x} + f_h = 0, \tag{24}$$

当其中的阻力已知时,再联立状态方程和连续性方程,就可求解声子气运动的动量守恒方程(24).

3.4. 能量守恒方程

在方程(21)两边乘以速度 $\mathbf{U}_h$,就可获得声子气流动的能量方程

$$\rho_h \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D} t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{U}_h^2\right) + \mathbf{U}_h \cdot \nabla p_h + f_h \mathbf{U}_h = 0, \tag{25}$$

在一维稳态条件下可简化为

$$\rho_h u_h^2 \frac{\mathrm{d} u_h}{\mathrm{d} x} + u_h \frac{\mathrm{d} p_h}{\mathrm{d} x} + f_h u_h = 0, \tag{26}$$

其中第 1 项是动能的变化率,第 2 项是驱动力作的功,第 3 项则是阻力引起的单位时间,单位体积声子气热能的耗散.

对于一维可压"绝热"流动(26)式可表示为

$$\rho_h u_h^2 \frac{\mathrm{d} u_h}{\mathrm{d} x} + \rho_h u_h c_p \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} x} + f_h u_h = 0. \tag{27}$$

4. 傅里叶导热定律的物理本质及其适用范围

傅里叶导热定律是实验定律,其物理意义通常被理解为温度梯度为驱动力,热流或热流密度则是被驱动的热量流,驱动力与热量流呈线性关系. 我们则从声子气质量(热量)运动的力平衡方程(24)出发,分析热量运动规律以及与傅里叶导热定律之间的联系.

如果在(24)式中忽略惯性力项,则声子气的力平衡方程可简化为

$$\rho_h c_p \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} x} + f_h = 0, \tag{28}$$

其物理意义很明显,就是驱动力与阻力的平衡方程. 设阻力与速度有线性的关系

$$f_h = \beta u_h, \tag{29}$$

其中 β 是阻力系数. 经过变换和整理后,(28)式可具有以下形式:

$$k \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} x} + \frac{c^2 k \beta}{\rho_h^2 c_p} q = 0, \tag{30a}$$

已知傅里叶导热定律为

$$k \frac{\mathrm{d} T}{\mathrm{d} x} + q = 0, \tag{30b}$$

由于傅里叶导热定律在常规条件下是广泛适用的,所以对比(30a)和(30b)式,就可以知道(30a)式中 q 前面的系数应该等于 1,也就是说与傅里叶定律对照可求得声子气运动的阻力系数

$$\beta = \frac{\rho_h^2 c_p}{c^2 k}, \tag{31}$$

与此同时,声子气力平衡式(30a)与傅里叶导热定律(30b)的对比还表明,当忽略惯性力时,声子气的力平衡方程就能够退化为傅里叶导热定律.

因此通过这些对比可以看到,傅里叶导热定律的物理本质是:在忽略惯性力条件下的声子气运动的驱动力与阻力的平衡方程,当阻力与速度成正比时,并可由傅里叶定律求得声子气运动的阻力系数.由于阻力与速度成正比,所以傅里叶定律又可以表示为驱动力与被驱动流的正比关系式.

把(31)式代回到(24)式,再联立连续性方程(19),声子气的动量守恒方程可写为

$$\frac{dT}{dx} - \frac{q^2}{\rho^2 c_p^3 T^3}\frac{dT}{dx} + \frac{q}{k} = 0 \tag{32}$$

从上式可以看到,由于惯性力项的存在,热流密度不再与温度梯度成正比,即此时傅里叶导热定律不再适用.把上式按傅里叶导热定律的形式整理可得到

$$q = -\left(1 - \frac{q^2}{\rho^2 c_p^3 T^3}\right)\frac{dT}{dx} = -k_D\frac{dT}{dx}, \tag{33}$$

其中

$$k_D = \left(1 - \frac{q^2}{\rho^2 c_p^3 T^3}\right)k,\ k_D < k, \tag{34}$$

k 是导热系数,是物性参数,k_D 称之为当量导热系数,但是它不再是物性参数,而是热流密度和温度的函数.也就是说,对于惯性力项不能忽略的导热过程,如果按傅里叶导热定律来计算所得到的导热系数 k_D 总是小于实际的导热系数 k,而且热流密度愈大,它们的差值也就愈大.

然而,在通常情况下,力平衡方程(24)和(32)中的惯性力与驱动力或阻力相比都是很小而可以被忽略,所以傅里叶导热定律可以很好地描述热量传递过程(声子气的运动过程).例如对于图2所示的一维平板导热,以硅为例,当 $T_1 = 400$ K, $T_2 = 300$ K,热流密度 $q = 10^4$ W/m^2 时,声子气的速度的量级仅为 10^{-5} m/s,惯性力与驱动力之比约为 10^{-16}.所以,惯性力的影响极小.但是,在某些极端条件下,例如极低温度下或极高热流密度条件下,傅里叶导热定律不再适用.必须用声子气的动量守恒方程(32)来描述热量传递过程.

以碳纳米管的导热为例(图3),两端有固定的温差20 K,平均温度为 $T = 70$ K,长度变化范围为5—1000 nm.假定碳纳米管的导热系数为 $k = 5000$ W·m^{-1}·K^{-1},按(34)式数值计算所得到的不同长度

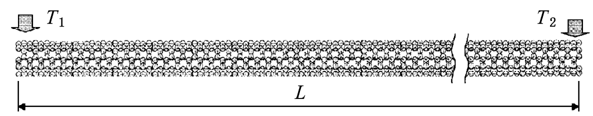

图3 碳纳米管的导热

碳纳米管的当量导热系数 k_D 变化曲线示于图4.此结果进一步表明,当热流密度很大惯性力不能忽略时,如仍然按傅里叶导热定律计算物体的导热系数,就会出现导热系数随长度增加的奇异现象.这是因为,它所得到的不是真正的导热系数 k.

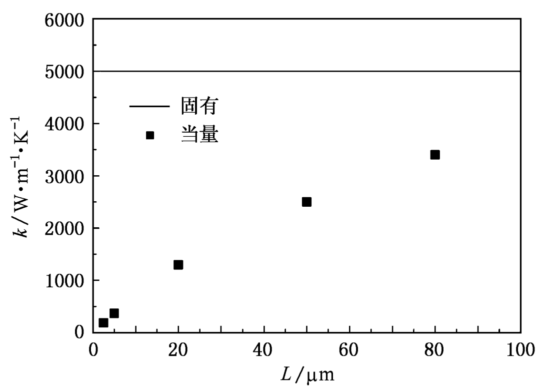

图4 当量导热系数随长度的变化曲线

由于本文没有涉及空间维数对固体导热过程的影响,所以无法与文献[11—13]中的结果进行直接的对比.但是揭示了当热流密度很大时,即使对于三维物体,也不能再按傅里叶导热定律方式计算导热系数,因此,文献[11—13]中仍然按傅里叶导热定律方式计算导热系数的某些结果是值得商榷的.

5. 结 论

(1)根据爱因斯坦的狭义相对论中的能量与质量的等效关系,建立了固体中声子气的质量(即热质量)的概念.与19世纪的热质概念不同,它是固体中晶格热振动能量的等效质量.

(2)基于固体德拜状态方程和比热关系式,导得了高于德拜温度时的晶格热振动的状态方程和声子气的状态方程.

(3)固体中的热量传递过程就是声子气的宏观运动.在引入了声子气的运动速度、驱动力、阻力等物理量的基础上,建立了声子气运动的守恒方程组.

(4)当惯性力可以被忽略时,声子气的动量方程

就退化为傅里叶导热定律,后者的物理本质是驱动力与阻力的平衡式.

(5) 在极高热流密度的条件下,声子气的惯性力不能忽略时,热流与温度梯度不再成正比,在稳态条件下,傅里叶导热定律也不再适用. 如仍按热流对温度梯度之比求导热系数,则会出现导热系数随热流密度或长度增加的现象.

[1] Cattaneo C 1948 *Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **3** 3

[2] Vernotte P 1958 *C. R. Acad. Sci.* **246** 3154

[3] Morse P M, Feshbach H 1953 *Methods of theoretical physics* (New York: McGraw-Hill)

[4] Gurtin M E, Pipkin A C 1968 *Arch. Ration Mech. Anal.* **31** 113

[5] Coleman B D, Fabrizio M, Owen D R 1982 *Arch. Ration Mech. Anal.* **80** 135

[6] Tzou D Y 1995 *ASME J. Heat Transfer* **117** 8

[7] Tzou D Y 1997 *Macro to Microscale Heat Transfer: the Lagging Behavior* (Washington: Taylor & Francis)

[8] Xu Y S, Guo Z Y 1995 *Int. J. Heat Mass Transfer* **38** 2919

[9] Brorson S D, Fujimoto J G, Ippen E P 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 1962

[10] Lepri S, Livi R, Politi A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1896

[11] Narayan O, Ramaswamy S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 200601

[12] Maruyama S 2002 *Physica* B **323** 193

[13] Livi R, Lepri S 2001 *Nature* **421** 327

[14] Ma B K, Yang X F, Wang R Z, Meng X R 1992 *Fundamentals of Solid State Physics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [马本堃、杨先发、王若桢、孟宪仁 1992 固体物理基础 (北京: 高等教育出版社)]

[15] Kittel C 2005 *Introduction to solid state physics* Xiang J Z, Wu X H (Trans.) (Beijing: Chemical Industry Press) (in Chinese) [基泰尔 2005 固体物理导论 项金钟, 吴兴惠译 (北京:化学工业出版社)]

[16] Yan S S 2003 *Fundamentals of Solid State Physics* (Beijing: Beijing University Press) (in Chinese) [阎守胜 2003 固体物理基础 (北京:北京大学出版社)]

[17] Tien C L 1987 *Statistical Thermodynamics* Gu Y Q (Trans.) (Beijing: Tsinghua University Press) (in Chinese) [田长霖 1987 统计热力学 顾毓沁译 (北京:清华大学出版社)]

[18] Du L J, Xi T G 1987 *Introduction to Solid Thermophysical Properties: Theory and Measurement* Wang M H (Trans.) (Beijing: China Metrology Publishing House) (in Chinese) [杜洛金、奚同庚 1987 固体热物理性质导论:理论和测量 王梅华译 (北京: 中国计量出版社)]

[19] Einstein A, Lorentz H A, Minkowski H, Weyl H 1952 *The Principle of Relativity* (New York: Dover Publications)

State equation of phonon gas and conservation equations for phonon gas motion *

Guo Zeng-Yuan† Cao Bing-Yang Zhu Hong-Ye Zhang Qing-Guang
(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)
(Received 1 August 2006; revised manuscript received 2 November 2006)

Abstract

Based on the mass-energy relation of Einstein's relativity theory, the mass of solid lattices is divided into two parts: the rest mass of solid atoms and the equivalent mass of thermal vibration energy of lattices. The latter is exactly the equivalent mass of the phonon gas in a solid. The vibration energy of the solid lattices includes the thermal energies consisting of the rest mass of the solid lattices and the equivalent mass of the phonon gas. The state equations for the lattice rest mass and the phonon gas are deduced based on the state equation of solids. The heat conduction is just the motion of the phonon gas in a solid. The conservation equations for the phonon gas motion are established. It is found that the conservation equation of phonon gas momentum degenerates to the Fourier's conduction law when the inertial force of the phonon gas can be ignored. The physical nature of the Fourier's law is the balance between the driving force and the resistance for the motion of the phonon gas. Under ultrahigh heat flux conditions where the inertial force is too high to be ignored, the Fourier's law is no longer valid even under the steady condition.

Keywords: non-Fourier heat conduction, phonon gas, mass of phonon gas, state equation, conservation equation
PACC: 4410, 6370, 0340G

† E-mail: demgzy@tsinghua.edu.cn